“La ciencia se me antoja un pasatiempo erudito”

F. Nietzsche

RESUMEN.

Para un sistema de muchos cuerpos, el potencial entre dos de ellos viene modificado, aunque ligeramente, por las interacciones de éstos con el resto del sistema. El Universo a gran escala no es una excepción: está compuesto por millones de galaxias en interacción gravitatoria que podemos imaginar como las partículas que constituyen un fluido gravitatorio. En este trabajo aplicamos métodos de la dinámica de líquidos para deducir la forma del potencial *efectivo* de interacción entre dos cuerpos a grandes distancias, del orden de Mpc, a partir de datos observacionales y/o sintéticos sobre como se distribuye la materia en el Universo. Los datos sobre la distribución de materia se obtienen de catálagos de galaxias e, indirectamente, a partir de anisotropías en la radiación cósmica de fondo. Con estos datos observacionales y el método que se expone a continuación, es posible concluir, al menos cualitativamente, como es la dependencia con la distancia del potencial y poder dilucidar si un comportamiento Newtoniano es posible dentro de los resultados.

También analizaremos situaciones en que la distribución de densidad es predicha por simulaciones numéricas bajo hipótesis de la materia oscura considerada como CDM (oscura fría) o HDM (oscura caliente).

El resultado que obtenemos es que un potencial atractivo y decreciente con la distancia, compatible (*pero no necesariamente idéntico*) con el comportamiento Newtoniano, sigue de los datos observacionales. Para las simulaciones numéricas, los resultados con CDM son similares a los observacionales, mientras que para HDM, encontramos un tipo de solución que se correspondería con un Universo oscilante.

I. INTRODUCCIÓN.

De nuestra experiencia en el laboratorio, hemos aprendido que sistemas físicos aparentemente muy dispares, comparten propiedades comunes. Esta analogía es clara en el caso de la física que describe las transiciones de fase en un líquido (como el agua) y en un imán. Existe una *universalidad* entre fenómenos que va más allá de que los métodos matemáticos que se utilizan para su descripción sean comunes: en el caso del agua y del imán, es la interacción electromagnética la que nos da una descripción *elemental*, y, sin embargo, las propiedades macroscópicas de estos dos materiales son muy diferentes. Otro ejemplo lo constituye la distribución de materia en el espacio-tiempo a distintas escalas: la fuerza de la gravedad, juega un papel universal mientras que los resultados de su acción dependen de la escala en la que actua, desde estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias, etc, hasta llegar a controlar la distribución de materia en el Universo a gran escala.

En el estudio de la estructura de la materia, en sus estados sólido, líquido o gaseoso, especialmente en líquidos, se manejan conceptos y herramientas que permiten describir la distribución de las moléculas en el espacio. En Cosmología, podemos pensar que existen problemas similares y podríamos asemejar el Universo con un líquido: siendo las partículas del líquido las galaxias o los cúmulos de galaxias que observamos a gran escala en el Universo. La diferencia esencial reside en el tipo de interacción, que es gravitacional a grandes escalas, mientras que en líquidos se supone una interacción, como por ejemplo, la de Lennard–Jones entre moléculas.

En este trabajo pretendemos estudiar la forma del potencial gravitatorio efectivo que resulta de la interacción gravitatoria entre los componentes de un "fluido" y comparar los resultados obtenidos con los resultados inferidos de los datos del satélite COBE y de catálogos de galaxias o simulaciones numéricas.

Nuestro objetivo será encontrar la forma en que varía con la distancia el potencial gravitatorio efectivo, estudiando las propiedades estadísticas de las distribuciones de materia que se observan. ¿Por qué buscamos ésto? En gravitación Newtoniana, el potencial va como r^{-1}, pero existen argumentos basados en el grupo de renormalización aplicado a la gravitación cuántica, que indican que esta proporcionalidad podría ser diferente a grandes escalas (Goldmann et al. 1992, Bertolami et al. 1993) : la constante de Newton dependería de la distancia debido a las fluctuaciones cuánticas de la geometría.

Aquí, seguiremos un camino diferente y utilizaremos herramientas tradicionales de la mecánica estadística para deducir la forma del potencial efectivo. A fin de poder progresar, hemos hecho una serie de hipótesis simplificadoras en primera aproximación, como asignar una masa común a todas las galaxias, etc. Debido a estas suposiciones nuestros resultados deben ser interpretados, por ahora, como indicaciones cualitativas y no como una solución exacta de la que extraer información directa.

Una técnica común en el estudio de líquidos y de la gran escala del Universo, la constituyen el cálculo de las funciones de correlación. En teoría de líquidos, las funciones de correlación se calculan partiendo del potencial de interacción entre dos partículas del líquido; en el estudio del Universo a gran escala, las funciones de correlación se obtienen de los datos observacionales midiendo la probabilidad de que una galaxia se encuentre a una distancia r de otra. En ambos casos, bien sea estudiando directamente la función de correlación o el espectro de potencia (que no es más que la transformada de Fourier de la función de correlación entre dos puntos) se obtiene información directa sobre la distribución de materia. Los métodos para obtener experimental u observacionalmente el espectro de potencia, son distintos en ambos casos. En los líquidos se obtiene observando la dispersión de un haz de partículas que atraviesa el fluido (ver Stanley 1971). En Cosmología, se utilizan los datos de COBE para escalas de Gpc (ya que las anisotropías en temperaturas están relacionadas con las anisotropías de densidad a estas distancias) y a escalas de orden del Mpc se extrae directamente la información mediante el estudio de la distribución de materia en los catálogos de galaxias.

Los antecedentes de este trabajo se dan exclusivamente en el terreno del estudio de los líquidos en los que se procede a la inversa de como nosotros haremos, o sea, partir de una forma conocida del potencial y extraer información sobre la distribución de la materia. No conocemos la aplicación de las herramientas a continuación expuestas al caso de la estructura a gran escala del Universo.

Las dificultades con que uno se encuentra en la consecución de nuestro objetivo son muchas y variadas, como se irá viendo a lo largo de estas páginas. Estas van, desde las dificultades matemáticas propias del aparato estadístico, a las dificultades en obtener datos fiables a partir de las observaciones. Las dificultades matemáticas las resolveremos mediante aproximaciones y, como es usual, definiremos un potencial efectivo dado por la ecuación de Percus-Yevick, y que no es más que una representación aproximada del potencial real. Las dificultades observacionales no está en nuestra mano el resolverlas.

II. FUNCIONES DE CORRELACIÓN Y PROMEDIOS.

La función de correlación describe como está distribuida la materia en el sistema físico. Si suponemos que el sistema físico está constituido por una distribución de objetos, con igual masa, densidad $\rho(\vec{r})$ y densidad promedio $<\rho>$, entonces la probabilidad de encontrar un objeto dentro de un elemento de volumen δV es:

$$\delta P = <\rho> \delta V. \tag{1}$$

La función de correlación entre dos puntos $\xi(r)$, (Layzer 1975) se define calculando la probabilidad de que dos objetos, separados por una distancia r (y asumiendo isotropía), se encuentren uno en el elemento de volumen δV_1 y el otro en δV_2, mediante

$$\delta P \equiv <\rho>^2 \delta V_1 \delta V_2 (1 + \xi(r)). \tag{2}$$

Tomando el promedio de la expresión anterior, tenemos:

$$< \frac{\delta P}{\delta V_1 \delta V_2} > = < \rho_1 \rho_2 > . \tag{3}$$

Por lo que deducimos que

$$\xi(r) = \frac{< \rho(\vec{r_1} + \vec{r_2}) \rho(\vec{r_1}) >}{< \rho >^2} - 1. \tag{4}$$

El significado físico de $\xi(r)$ es que ésta será positiva cuando la materia esté predominantemente a una distancia r de algún punto determinado, y viceversa, cuando es negativa significa que es inusual encontrar partículas dentro de la cáscara esférica de radio r y espesor dr. En otras palabras, $\xi(r)$ mide el exceso de probabilidad sobre un valor aleatorio, de encontrar objetos separados por una distancia r. *

Como ejemplo ilustrativo del uso de $\xi(r)$ en cosmología, mencionaremos que del estudio numérico de los catálogos de galaxias existentes, se puede deducir, mediante la definición dada anteriormente, una función de correlación que tiene la forma

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1.77}, \tag{5}$$

donde $r < 15$ Mpc, $r_0 = 4h_0^{-1}$ Mpc (Peebles 1980). Si en vez de galaxias utilizamos cúmulos de galaxias (o sea, las partículas ahora serían cúmulos de galaxias), se obtiene la misma forma funcional, aunque ahora $r_0 = 25h_0^{-1}$ Mpc, con exponente que es aproximadamente el mismo (~ -1.8) (Börner 1988).

Existen otras maneras de dar la información contenida en la función de correlación de dos puntos. Por ejemplo, usando la función de correlación angular (definida al igual que $\xi(r)$, pero con la distancia angular en el lugar de r) (ver Peebles 1980), o usando el contraste de densidad, o bien el espectro de potencia de la densidad de materia (definido como la transformada de Fourier de la función de correlación entre dos puntos). Así, es común en la literatura encontrar el espectro de potencia en lugar de la función de correlación entre dos puntos. La información es, evidentemente, la misma.

Supongamos ahora una distribución de materia constituida por un número finito N de partículas puntuales, todas de la misma masa. Eligiendo adecuadamente las unidades de masa, podemos escribir la densidad de esta distribución como $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$. (Vemos que en este caso $<\rho>= \frac{N}{V}$.)

---

*Nótese que en ξ no está incluida la autocorrelación, la correlación de una partícula consigo misma, lo que detallaremos más adelante.

Con el fin de aclarar la diferencia entre $\xi(r)$ y la correspondiente función de correlación de dos puntos, que incluye la autocorrelación, introducimos la función $G(|\vec{r}-\vec{r'}|)$ mediante:

$$G(|\vec{r}-\vec{r'}|) \equiv < \sum_{i,j=1}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r'}-\vec{r}_j) > - < \rho >^2$$

$$= < \rho > \delta(\vec{r}-\vec{r'}) + < \sum_{i,j=1;i\neq j}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r'}-\vec{r}_j) > - < \rho >^2 . \tag{6}$$

Se ve claramente en la expresión anterior, que el primer término es debido a la correlación de las partículas consigo mismas, mientras que el segundo término se debe a la correlación entre dos partículas, sin autocorrelación, multiplicada por $< \rho >^2$, es decir, $< \rho >^2 \xi(|\vec{r}-\vec{r'}|)$, por lo que podemos escribir:

$$< \rho >^2 \xi(\vec{r}-\vec{r'}) = < \rho(\vec{r})\rho(\vec{r'}) > - < \rho >^2$$

$$= < \sum_{i,j=1;i\neq j}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{r'}-\vec{r}_j) > - < \rho >^2 . \tag{7}$$

Con $r = |\vec{r}-\vec{r'}|$ y para este $\rho(\vec{r})$ particular, utilizando (4), obtenemos la siguiente relación entre estas dos funciones de correlación

$$G(r) = < \rho >^2 \xi(r) + < \rho > \delta(r), \tag{8}$$

que demuestra de forma explícita y sencilla el paso de una función a otra.

A. Promedios.

En el apartado anterior, hemos introducido el símbolo $< (\cdots) >$, que indica que se ha calculado un promedio. Existen al menos dos maneras diferentes de calcular estos promedios: (i) promedio en volumen, y (ii) promedio mecano–estadístico. Pasamos a describir estas dos formas.

(i) En este caso, el promedio se calcula según la expresión $< (\cdots) > = \frac{1}{V}\int_V d\vec{r}(\cdots)$, donde $(\cdots)$ representa la cantidad cuyo promedio se desea obtener; es claro que se calcula un promedio en volumen. Este promedio describe la distribución macroscópicamente. La $\xi(r)$ observacional se extrae precisamente mediante este algoritmo.

Esta definición de promedio y función de correlación no están exentas de caveats. Por ejemplo, ξ depende del volumen total V sobre el que integramos, es decir, depende de la escala en la cual estamos realizando la partición de nuestro sistema, ya que la densidad promedio depende de la escala a la cual estemos observando. Reconocemos que no tenemos una definición absolutamente buena que extraiga información de los datos observacionales pero, sin embargo, esta descripción condensada de la distribución de materia es estándar y muy útil, precisamente por la capacidad de condensar la información de modo que ésta pueda ser manejable. A pesar de ello, el problema puede, además, ser suavizado si cuando tomamos las galaxias o cúmulos de galaxias, el volumen es lo suficientemente grande como para considerar que se está en régimen de homogeneidad.

(ii) En este caso, el cálculo del promedio se realiza mediante la expresión $<(\cdots)>= \int d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_n (\cdots) P(U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n))$, donde $(\cdots)$ tiene el mismo significado que en (i). La función $P(U)$ representa la probabilidad de que las partículas que constituyen el sistema ocupen las posiciones $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$, donde U es la energía potencial total del sistema en el estado que corresponde a las posiciones $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$.

Esta expresión es un caso particular de la distribución canónica utilizada en la mecánica estadística y que se prueba fácilmente para cuando el Hamiltoniano es separable en dos partes: una dependiente de las posiciones y otra que depende únicamente de los momentos de las partículas. La dependencia funcional con los momentos no aparece en nuestra forma final de la probabilidad ya que integramos en el espacio de momentos, y ésta queda reducida a una constante que desaparece al normalizar P.

Esta forma de calcular promedios refleja de manera directa la influencia de la dinámica, a través de U, en la configuración en la que se encuentra el sistema. Aquí se explotan las características mecano–estadísticas del sistema al máximo. El uso de métodos estadísticos nos permitirá deducir propiedades del sistema a gran escala a partir de sus propiedades físicas “microscópicas”.

Estas dos maneras de calcular promedios son equivalentes en la mayoría de los casos de interés, y el poder igualarlos nos da un puente entre las propiedades macroscópicas y las propiedades microscópicas de un sistema físico. Esto, en el caso del Universo, se traduce en una relación entre las más grandes escalas, donde se supone homogeneidad, y escalas galácticas, donde claramente ésto no es aceptable.

La distribución de probabilidad no es conocida en los casos de no-equilibrio. Para poder proceder con nuestro programa, hemos de suponer equilibrio y que en estas condiciones es válida la distribución clásica de Boltzmann. Un argumento cualitativo para entender esta hipótesis es que podemos establecer nuevamente una analogía con un fluido clásico, un fluido de galaxias, ya que al fin y al cabo solo se trata de un cambio de escala, y que en principio no hay razones para suponer que no sea válida la distribución de Boltzmann. Como es costumbre en el estudio del Universo a gran escala, supondremos que el sistema está *virializado*, y por tanto, en equilibrio termodinámico. Esta hipótesis es importante en lo que sigue, y está en parte respaldada por los resultados que se obtienen de simulaciones de la formación de estructuras a gran escala, en las que se deducen distribuciones de materia con la misma función de correlación de dos puntos desde bastante tiempo atrás en el Universo.

La función de distribución de probabilidad de Boltzmann para el tiempo cósmico presente es

$$P(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N; \vec{p}_1, ..., \vec{p}_N) \propto e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N;\vec{p}_1,...,\vec{p}_N)}$$

$$= e^{-\beta U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)} e^{-\frac{1}{2}\beta\sum_{i=1}^{N}(\vec{p}_i+H_0\vec{r}_i)^2}, \tag{9}$$

donde $\mathcal{H}$ es el Hamiltoniano del sistema gravitatorio, H_0 es la constante de Hubble (con el término proporcional a H_0 estamos teniendo en cuenta la expansión del Universo), la masa de las partículas ha sido tomada como la unidad y hemos tomado $a(t_0) = 1$, donde a es el factor de escala en la métrica de FRW. Si integramos en el espacio de momentos, y hacemos los cambios de variable $\vec{q}_i = \vec{p}_i + H_0\vec{r}_i$ dentro de la integral, obtendremos la probabilidad para una configuración determinada en el espacio de posiciones:

$$P(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) \propto e^{-\beta U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)} \int d\vec{q}_i ... d\vec{q}_N e^{-\frac{1}{2}\beta \sum_{i=1}^{N} q_i^2}. \quad (10)$$

Vemos que la integral en (10) es una constante. Con la normalización, obtendremos:

$$P(U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)) = \frac{e^{-\beta U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)}}{Z}, \quad (11)$$

así como la función de partición de esta distribución canónica dada por:

$$Z = \int d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N e^{-\beta U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)}. \quad (12)$$

En la mecánica estadística $\beta = \frac{1}{k_B T}$. De aquí se deduce, que para una densidad de partículas $\rho = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ y usando (4):

$$< \rho >^2 \xi(|\vec{r} - \vec{r'}|) = \int d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N \frac{e^{-\beta U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N)}}{Z}$$

$$\left(\sum_{i,j=1; i \neq j}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta(\vec{r'} - \vec{r}_j) - < \rho >^2 \right) \quad (13)$$

donde $U = \sum_{i<j=1}^{N} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, y V es la energía potencial entre dos partículas.

La ecuación (13) encierra en sí la idea que queremos estudiar y aplicar al Universo: *una relación entre* ξ *y* V.

También tenemos las siguientes ecuaciones, que nos serán de utilidad más adelante

$$< \rho(\vec{r}_1) > = \frac{N}{Z} \int d\vec{r}_2 ... d\vec{r}_N e^{-\beta \sum_{i<j=1}^{N} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}, \quad (14)$$

$$< \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) > = \frac{N(N-1)}{Z} \int d\vec{r}_3 ... d\vec{r}_N e^{-\beta \sum_{i<j=1}^{N} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}. \quad (15)$$

Para terminar esta sección señalamos el resultado que acabamos de obtener: *se pueden relacionar de forma precisa los datos observacionales relativos a la distribución de materia a gran escala y el potencial entre dos partículas inmersas en un sistema gravitatorio de muchos cuerpos.*

Señalemos también, que más adelante haremos uso del resultado de que para un fluido, que fuera homogeneo a escala macroscópica (en el Universo sería a gran escala), se cumple que

$$< \rho(\vec{r}) > = < \rho > = \frac{N}{V} = constante. \quad (16)$$

III. RELACIÓN DEL POTENCIAL ENTRE DOS CUERPOS Y EL ESPECTRO DE POTENCIA.

Con el fin de obtener resultados explícitos para la relación entre el potencial de interacción y la función de correlación de dos puntos, vamos a seguir una estrategia similar a la que se sigue en teoría de líquidos. Para ello introduciremos la función de correlación directa $C(r)$, que se define a través de la ecuación de Ornstein-Zernike:

$$\widetilde{C}(k) \equiv \frac{\widetilde{\xi}(k)}{1+ < \rho > \widetilde{\xi}(k)}. \tag{17}$$

Donde $\widetilde{\xi}(k) = \int d\vec{r}\xi(r)e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ es la transformada de Fourier de $\xi(r)$ y $\widetilde{C}(k) = \int d\vec{r}C(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}$. La expresión anterior tiene una fácil interpretación física en término de fenómenos de cambio de escala, y cuando se escribe en espacio de configuración (usando el teorema de convolución) su expresión es

$$\xi(\vec{r}-\vec{r}') = C(\vec{r}-\vec{r}')+ < \rho > \int d\vec{r}''C(\vec{r}-\vec{r}'')\xi(\vec{r}''-\vec{r}'), \tag{18}$$

cuyo significado físico es obvio. Nótese que $\widetilde{C} \sim \widetilde{\xi}$ cuando $\widetilde{\xi} \sim 0$ y $\widetilde{C} \sim \frac{1}{<\rho>}$ cuando $\widetilde{\xi}$ es suficientemente grande. Esto apunta hacia la conveniencia de suponer que $C(r)$ es una función con rango similar al potencial de interacción y que $\xi(r)$ sea el resultado de propagar esta función de correlación directa. (Esta observación se cumple en la aproximación de Percus-Yevick, que estudiaremos más adelante, y que será instrumental en el desarrollo de nuestras ideas.)

Para extraer el potencial efectivo entre dos partículas es además necesaria una ecuación de cierre, una relación entre C, ξ y V_{eff}. Para ello es necesario el llevar a cabo aproximaciones a la ecuación de Ornstein-Zernike. De entre las muchas posibles, la que mejor se ajusta a la situación física que pretendemos estudiar y guarda una sencillez que la hace numéricamente tratable, es de Percus-Yevick, descrita en el APENDICE B. Esta aproximación conduce a la siguiente importante relación:

$$C(r) = (1 - e^{\beta V_{eff}(r)})(1 + \xi(r)). \tag{19}$$

Donde el potencial V_{eff} que aparece en esta ecuación es el *potencial efectivo* calculado en la aproximación de Percus-Yevick. Nuestro objetivo es su cálculo para sistemas gravitatorios de muchos cuerpos. †

Ya estamos en condiciones de obtener la relación entre el espectro de potencia $P(k)$ y el potencial efectivo. $P(k)$ se define como

$$P(k) \equiv \tilde{\xi}(k). \tag{20}$$

De aquí,

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} P(k) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{21}$$

De modo que usando la relación (17):

$$\tilde{C}(k) = \frac{P(k)}{1 + P(k)}, \tag{22}$$

es decir

$$C(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{P(k)}{1 + P(k)} e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{23}$$

Usando (19), relacionamos $V_{eff}(r)$, $C(r)$ y $\xi(r)$, por lo que, con las expresiones anteriores, podremos escribir la siguiente fórmula que nos relaciona (módulo las aproximaciones ya discutidas) el potencial efectivo con el espectro de potencias,

---

†En lo que sigue, y por conveniencia, haremos $<\rho>= 1$, seleccionando la unidades de longitud apropiadas (ya que las unidades de masa las hemos fijado antes, poniendo la condición de que la masa de cada galaxia es la unidad de masa). La unidad de longitud es 10^6 pc, la unidad de masa es $2.775 \times 10^{11}\ M_\odot$ y la densidad es así la densidad crítica, 1 en nuestras unidades. Si la masa media de las galaxias fuese diferente, y mantenemos $<\rho>= 1$, ello sólo afectaría ligeramente a las unidades de longitud, ya que multiplicar por 8 la masa de las galaxias implicaría solamente el doblar la unidad de longitud. Así, en los gráficos que apareceran en este trabajo, donde pone 1 Mpc, se entenderá una unidad de longitud próxima al Mpc.

$$(1 - e^{\beta V_{eff}(r)}) = \frac{C(r)}{1+\xi(r)}. \tag{24}$$

Tras unos cálculos sencillos utilizando las fórmulas obtenidas más arriba, se llega a

$$\beta V_{eff}(r) = ln\left(1 - \frac{\int_0^\infty dkksin(kr)(\frac{P(k)}{1+P(k)})}{2\pi^2 r + \int_0^\infty dkksin(kr)P(k)}\right). \tag{25}$$

Esta expresión relaciona directamente el potencial efectivo con cantidades que se deducen de los datos observacionales, y en particular con el espectro de potencia $P(k)$.

Finalmente nótese que, desde un punto de vista puramente operativo, y con vistas al cálculo numérico, es conveniente reexpresar las integrales en la última ecuación de la siguiente manera,

$$\int_0^\infty dkksin(kr)P(k) = \frac{1}{r^2}\int_0^\infty dxxsin(x)P(x/r), \tag{26}$$

$$\int_0^\infty dkksin(kr)P(k) = \frac{1}{r^2}\int_0^\infty dxxsin(x)P(x/r), \tag{27}$$

ya que así se evita la presencia de oscilaciones espúreas en el proceso de integración.

IV. FUENTES DE DATOS OBSERVACIONALES.

Los datos observacionales que nos van a permitir deducir el espectro de potencia se encuentran en dos clases diferentes de fuentes: (a) catálogos de galaxias y (b) datos obtenidos por COBE. A continuación discutimos estas dos fuentes de manera más detallada, prestando atención a sus posibles limitaciones.

A. Catálogos de galaxias:

Válidos hasta distancias del orden de 50 Mpc (o sea, para valores de k grandes). Podemos hallar observacionalmente la función de correlación entre dos puntos y, con su transformada de Fourier, obtener el espectro de potencia $P(k)$ para k grandes. También puede ser extraido a partir de la función de correlación angular o el contraste de densidad. En la Figura

1 (extraida de Maddox et al. 1990) , aparece la función de correlación angular frente al ángulo, obtenido utilizando el APM (Automatic Plate Machine), que muestra un cambio de pendiente a partir de un cierto ángulo. Es ilustrativo relacionar este cambio de régimen con el cambio de regimen que se observa en los distintos $P(k)$ obtenidos. Con la función de correlación angular se puede extraer la función de correlación entre 2–puntos según la relación exacta que aparece por ejemplo en (Peebles 1980), y que bajo la condición de pequeñas separaciones es aproximadamente:

$$\xi(r) \approx W(\theta)\frac{D}{r}, \tag{28}$$

donde D es la distancia máxima hasta donde llega el muestreo y $\theta = \frac{r}{D}$.

También se puede obtener mediante el contraste de densidad σ (ver por ejemplo (Padmanabhan 1993)), utilizando

$$\sigma^2(r) =< \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2_r >$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\ k^2 P(k)\left[\frac{3sin(kr) - 3krcos(kr)}{(kr)^3}\right]^2. \tag{29}$$

A partir de aquí se induce la forma de $P(k)$ que nos reproduce el $\sigma^2(r)$ observado. Apreciamos también un cambio de pendiente en el σ–observacional (ver por ejemplo la Figura 2, tomada de (Padmanabhan et al. 1992), lo que nuevamente estará relacionado con un cambio de pendiente para distintos regímenes de $P(k)$. En dicha gráfica aparecen también los datos de COBE, de los que hablaremos en la subsección siguiente.

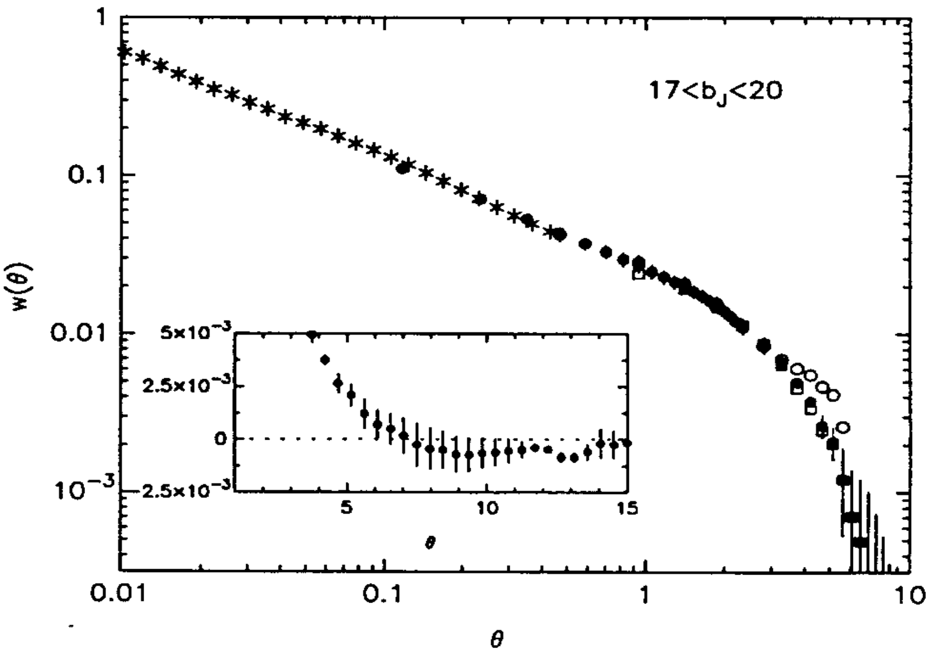

17<b_J<20
w(θ)
θ

Fig.1

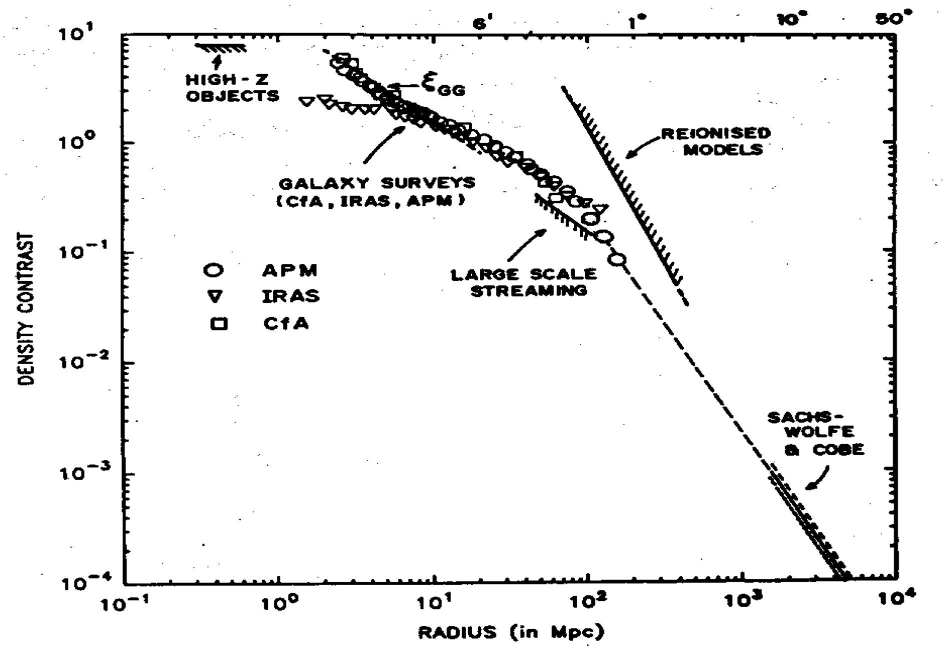

HIGH-Z OBJECTS
GALAXY SURVEYS (CfA, IRAS, APM)
REIONISED MODELS
LARGE SCALE STREAMING
SACHS-WOLFE & COBE
APM
IRAS
CfA
DENSITY CONTRAST
RADIUS (in Mpc)

Fig.2

Cuando se comparan estos datos con los modelos de materia oscura fría (CDM: materia oscura que sólo está sujeta a la fuerza de la gravedad), resultan ciertas discrepancias, los datos dan lugar a más estructura que la predicha por modelos con CDM pura (Maddox et al. 1990), estando también muy lejos de modelos con materia oscura caliente (HDM: que tiene la peculiaridad de que sólo está sujeta a la fuerza de gravedad y no colisiona). Para contrastar nuestros resultados, en lo que sigue, probaremos también con $P(k)$ derivados en simulaciones numéricas con CDM y HDM.

B. Datos de COBE

Para valores de k pequeños, o sea, a grandes distancias de hasta varios Gpc, los únicos datos que poseemos acerca de la distribución de materia son los que nos proporciona el satélite COBE, suponiendo que las hipótesis acerca de lo que genera los datos de COBE sean correctas. La actual interpretación es que las anisotropías de temperatura en la radiación cósmica de fondo detectadas por COBE son debidas a la existencia de anisotropías del potencial, a su vez debidas a la anisotropía en densidad, en la época del desacoplo materia-radiación.

La relación entre $P(k)$ en el momento del desacoplo y el $P(k)$ actual, viene dada por

$$P(k)_{final} = C\ T(k)^2 P(k)_{inicial}, \tag{30}$$

donde C es independiente de k, y $T(k)$ es la función de transferencia (ver por ejemplo (Lyth 1993)) que para valores pequeños de k (al menos para $k \leq 0.025\ Mpc^{-1}$) es aproximadamente 1. Así, el espectro de potencia dado por COBE, se mantiene en este rango de k en el tiempo actual, dandonos información de la distribución de densidad a grandes escalas en el instante *actual*.

Los datos de COBE están bastante acordes con que la materia esté solamente sometida a la gravedad, o sea, predominio de la materia oscura fría (CDM).

Las anisotropías de la CMBR (Cosmic Microwave Background Radiation - Radiación Cósmica de Fondo) para $\Omega = 1$ y asumiendo que el efecto Sachs-Wolfe es el dominante en estas anisotropías, (Peebles 1982, Padmanabhan 1993 o Padmanabhan et al. 1992) vienen descritas por

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right) = -\frac{1}{3}G\int d^3\vec{r}\frac{\delta\rho(\vec{r},t_{act})}{|\vec{r}_{emision}-\vec{r}|} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{rms} = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=2}^{\infty}(2l+1)C_l e^{-\frac{l^2\theta_c^2}{2}}, \tag{32}$$

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{Q} = \frac{5}{4\pi}C_2 e^{-2\theta_c^2}, \tag{33}$$

$$C_l = \frac{H_0^4}{2\pi}\int_0^{\infty} dk\frac{P(k)}{k^2}\left|j_l\left(\frac{2k}{H_0}\right)\right|^2, \tag{34}$$

donde Q se refiere a cuadrupolo, θ_c es la resolución angular del haz de COBE y j_l es la función esférica de Bessel de orden l.

Para un $P(k) = Ak^{\epsilon}$, se obtiene

$$C_l = \frac{AH_0^{\epsilon+3}\Gamma(3-\epsilon)\Gamma(\frac{2l+\epsilon-1}{2})}{16\Gamma^2(\frac{4-\epsilon}{2})\Gamma(\frac{2l+5-\epsilon}{2})}. \tag{35}$$

Los datos de COBE (Smoot et al. 1992) conducen a los siguientes valores:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{rms} = (1.1 \pm 0.2)\times 10^{-5}, \tag{36}$$

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{Q} = (0.48 \pm 0.15)\times 10^{-5}, \tag{37}$$

con $\theta_c \approx 0.05129$. Luego, podríamos extraer la amplitud por medio de un cálculo directo usando las propiedades de la "función Gamma" (ver por ejemplo Abramowitz et al.1972).

De este modo, para $\epsilon = 1$ (modelo de Harrison-Zel'dovich), utilizando los valores observacionales en (36) y (37), así como (32), (33) y para un $H_0 = 100\ km/s\ Mpc^{-1}$, se obtiene un valor de $A = 3.3\times 10^5$, y un $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{rms} / \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{Q} = 2.3$ que es compatible con los datos observacionales. Vemos que $P(k) \propto k$ es aceptable cuando k es pequeño.

Otros autores (Gorski et al. 1994) encuentran que, incluyendo la anisotropía cuadrupolar, $\epsilon = 1.10 \pm 0.32$ por los datos de COBE, y de este modo, el modelo de Harrison-Zel'dovich ($\epsilon = 1$) es consistente con estos resultados. Pero en (Wright et al. 1994), con recientísimos datos de COBE, aparece $\epsilon = 1.46^{+0.41}_{-0.44}$ que sería incompatible con el modelo de Harrison-Zel'dovich excepto si consideramos emisión de ondas gravitatorias u otros factores que rebajen el valor de ϵ.

Nosotros usaremos $\epsilon = 1$ en el regimen de k pequeño en los $P(k)$ que escojamos, aunque también probaremos con otro valor: $\epsilon = 1.46$ que implica $A = 1.23 \times 10^7\ h^{-4.46} Mpc^{4.46}$

V. APLICACIÓN DEL MÉTODO A DIVERSOS ESPECTROS DE POTENCIA.

Para llevar adelante nuestro programa, haciendo uso de lo mencionado anteriormente, y por los métodos numéricos expuestos en el APENDICE C, podemos dar un espectro de potencia $P(k)$ y hallar la energía potencial $V_{eff}(r)$. Hallaremos V_{eff} en el rango de hasta 50 Mpc, que aproximadamente es hasta donde llegan los mapas de galaxias y en el que se trata el Universo como plano.

Consideramos varios $P(k)$ obtenidos en la literatura a partir de diversos datos observacionales, y de ellos inferiremos un $\beta V_{eff}(r)$. Más adelante haremos lo mismo con $P(k)$ obtenidos mediante simulación numérica.

A. Resultados observacionales

Los datos observacionales se suelen ajustar, en los dos regímenes descritos en el apartado anterior, a leyes de potencias del tipo $P(k) = Ak^{\epsilon}$ para k pequeños y $P(k) \propto k^{\epsilon - \gamma}$ para k grandes. Por lo tanto, se puede dar una fórmula (ver por ejemplo Padmanabhan et al. 1992) que englobe ambos comportamientos:

$$P(k) = \frac{Ak^{\epsilon}}{1 + (\frac{k}{k_c})^{\gamma}}. \tag{38}$$

A esta clase pertenece el espectro dado por (Padmanabhan et al. 1992) donde $\epsilon = 1$, $\gamma = 2.4$, $k_c = 0.047hMpc^{-1}$, $A = 3.318 \times 10^5\ h^{-4}Mpc^4$. Este es, como decíamos más atrás, un resultado extraido de COBE y catálogos de galaxias. Los resultados numéricos obtenidos para $\beta V_{eff}(r)$ se muestran en la Fig.3.

Otro ejemplo es el dado por (Branchini et al. 1994), donde $\gamma = 2.20+\epsilon$, $k_c = 0.08hMpc^{-1}$, la amplitud no es dada y ϵ, suponen los autores, que está entre 0.70 y 1.0. Los resultados numéricos los mostramos dibujados en la Fig.4 (con $\epsilon = 1.00$, $A = 3.3\ 10^5$ por COBE/efecto Sachs-Wolfe) y Fig.5 (con $\epsilon = 1.46$, $A = 1.23 \times 10^7$ del efecto Sachs-Wolfe y COBE). Este último valor de ϵ procede de los últimos datos observacionales de COBE (Wright et al. 1994) y no está dentro de los que consideran Branchini et al. 1994, pero creemos interesante discutir este caso, dado que corresponde a resultados más recientes de COBE.

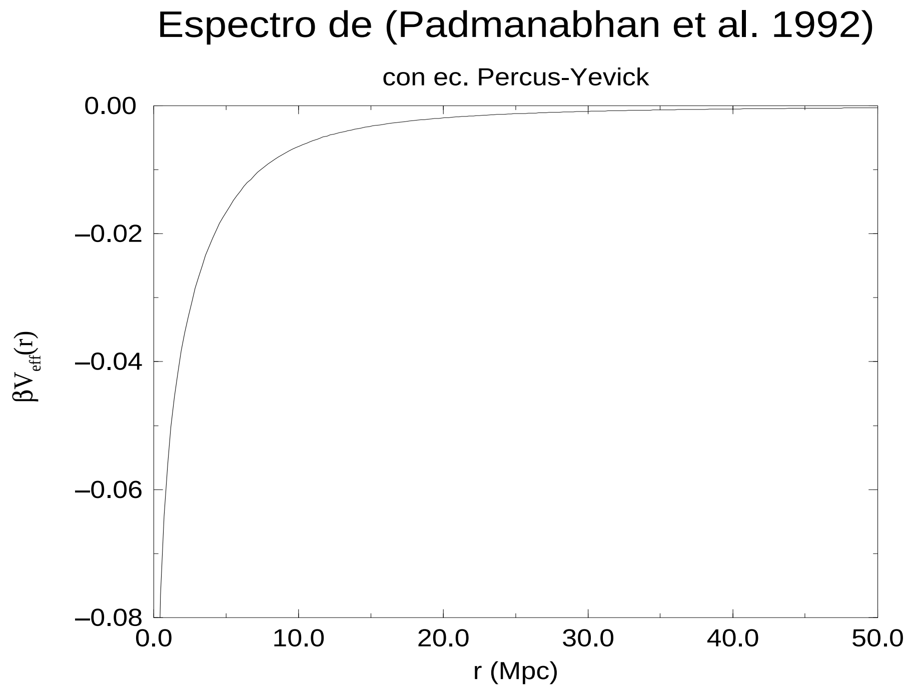
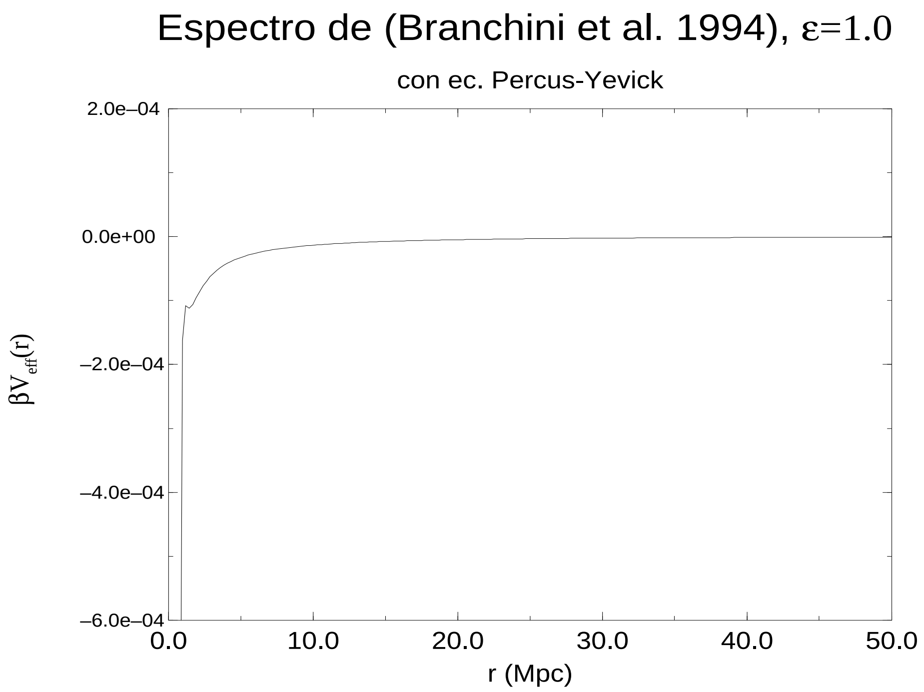
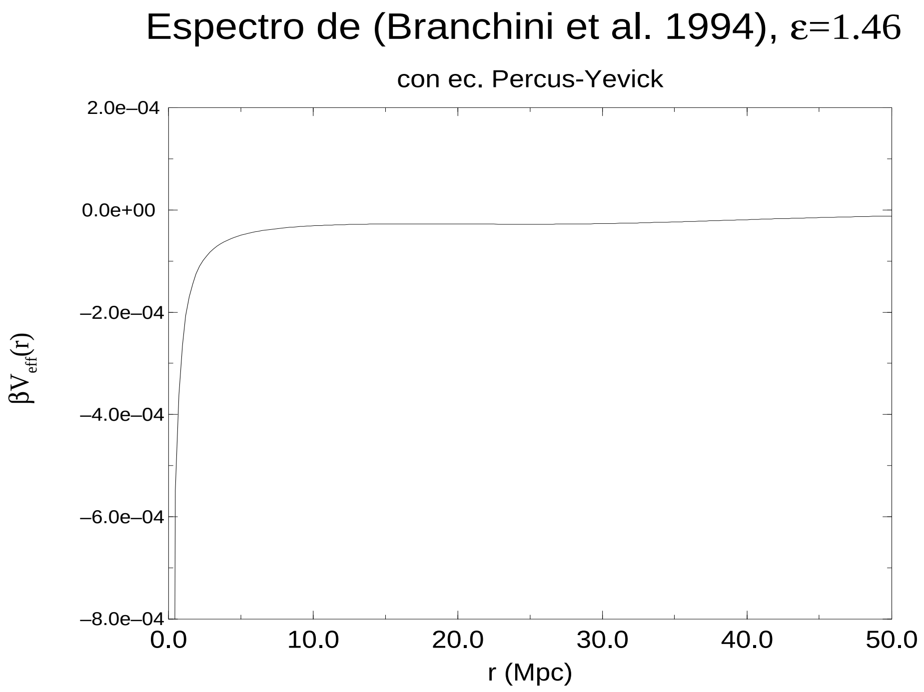


Fig.3



Espectro de (Branchini et al. 1994), ε=1.0
con ec. Percus-Yevick
2.0e−04
0.0e+00
−2.0e−04
−4.0e−04
−6.0e−04
βV_eff(r)
0.0
10.0
20.0
30.0
40.0
50.0
r (Mpc)

Fig.4



Espectro de (Branchini et al. 1994), ε=1.46
con ec. Percus-Yevick
2.0e−04
0.0e+00
−2.0e−04
−4.0e−04
−6.0e−04
−8.0e−04
βV_eff(r)
0.0
10.0
20.0
30.0
40.0
50.0
r (Mpc)

Fig.5

B. Resultados de simulaciones numéricas con CDM y HDM.

También existen en la literatura $P(k)$ obtenidos mediante simulación numérica de formación de estructura.

Antes de nada, es necesario comentar que los resultados de las simulaciones numéricas se extraen utilizando el hecho de que las estructuras se forman bajo la acción de una fuerza gravitatoria Newtoniana. Con lo cual, en el caso de que se obtenga un potencial muy distinto de éste, habría en rigor que volver a realizar las simulaciones numéricas con el nuevo potencial y así sucesivamente.

Un modelo basado en simulación numérica usando CDM nos da (Bond et al. 1984):

$$P(k) = \frac{Ak}{[1 + [\alpha K + (\beta k)^{3/2} + (\gamma k)^2]^\nu]^{2/\nu}}, \tag{39}$$

con $\alpha = 6.4\ (\Omega_0 h^2)^{-1} Mpc$, $\beta = 3.0\ (\Omega_0 h^2)^{-1} Mpc$, $\gamma = 1.7\ (\Omega_0 h^2)^{-1} Mpc$ y $\nu = 1.13$.

Los resultados obtenidos para[‡] βV_{eff} se muestran en la Fig.6 (con $A = 3.3 \times 10^5$, obtenida usando datos de COBE/efecto Sachs-Wolfe).

[‡]No debe confundirse la β en (39) con la β en βV_{eff}.

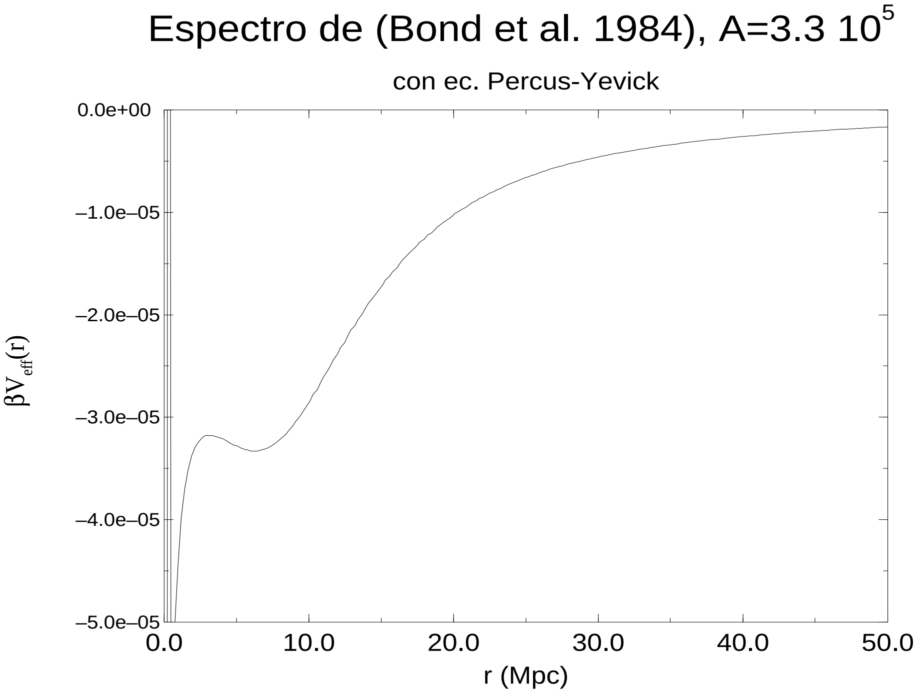


Fig.6

Asímismo, en simulaciones hechas usando códigos distintos y con CDM, se obtiene

$$P(k) = \frac{Ak}{(1 + Bk + Ck^{3/2} + Dk^2)^2}, \tag{40}$$

con $B = 1.7\ (\Omega_0 h^2)^{-1} Mpc$, $C = 9.0\ (\Omega_0 h^2)^{-3/2} Mpc^{3/2}$, $D = 1(\Omega_0 h^2)^{-2} Mpc^{-2}$. Nuestros resultados aparecen en la Fig.7 (con $A = 3.3 \times 10^5$ dado por COBE/Sachs-Wolfe).

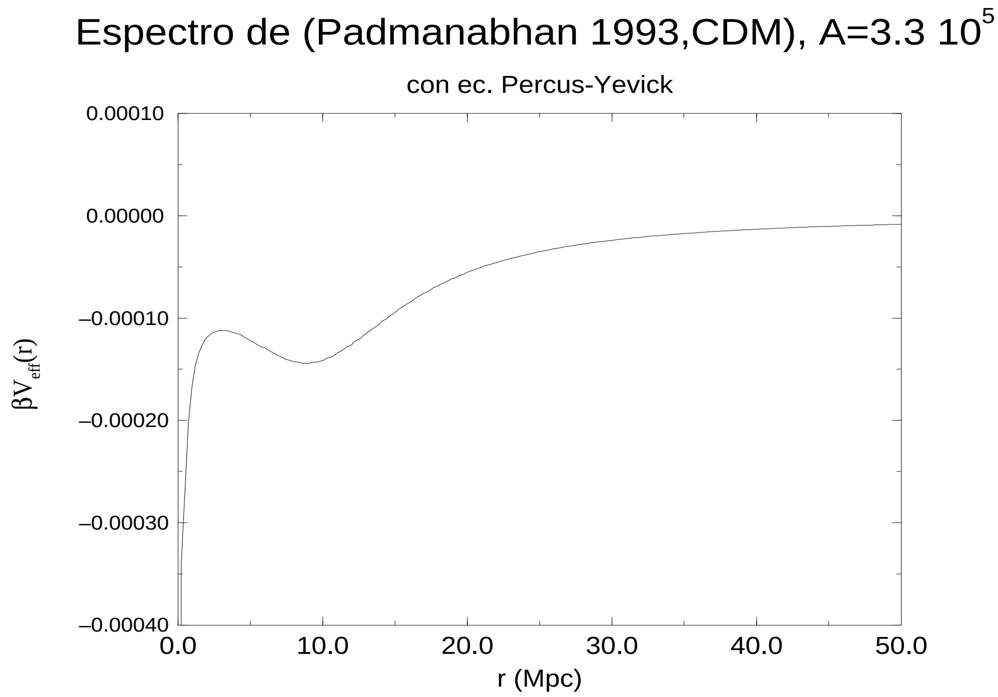


Fig.7

Si en lugar de CDM, se usa HDM (Padmanabhan 1993) y suponiendo que los constituyentes de esa HDM son neutrinos con masa de 30 eV/c^2 los autores obtienen

$$P(k) = Ae^{-4.61(\frac{k}{k_c})^{3/2}}k, \tag{41}$$

con $k_c = 0.16\ Mpc^{-1}$. Los resultados que nosotros obtenemos están representados en la Fig.8 (con $A = 3.3 \times 10^5$).

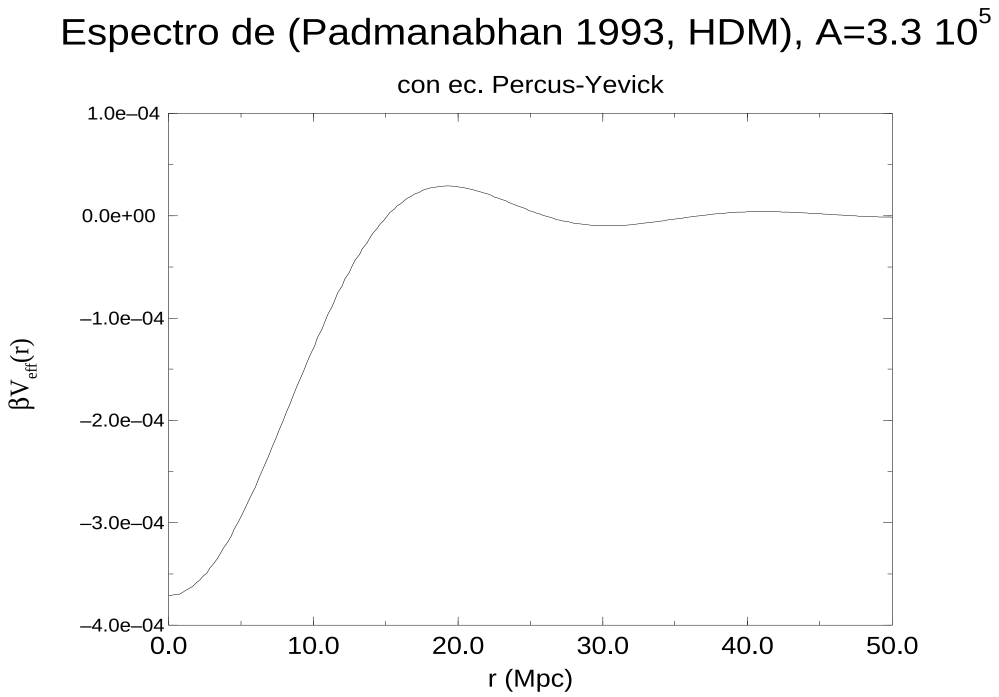


Fig.8

VI. ANALISIS DE LOS RESULTADOS.

A partir de los resultados obtenidos en la sección anterior, es posible extraer información sobre el potencial efectivo que resulta de considerar el Universo como un líquido.

En primer lugar, y por conveniencia, introducimos un $G(r)$ tal que:

$$\beta V_{eff}(r) \equiv -\frac{\beta G(r)}{r}, \tag{42}$$

Representamos los resultados para $G(r)$ en las Figuras 9 y 10, usando $\beta V_{eff}(r)$ procedentes de datos puramente observacionales así como los que se extraen de simulaciones numéricas con CDM u HDM.

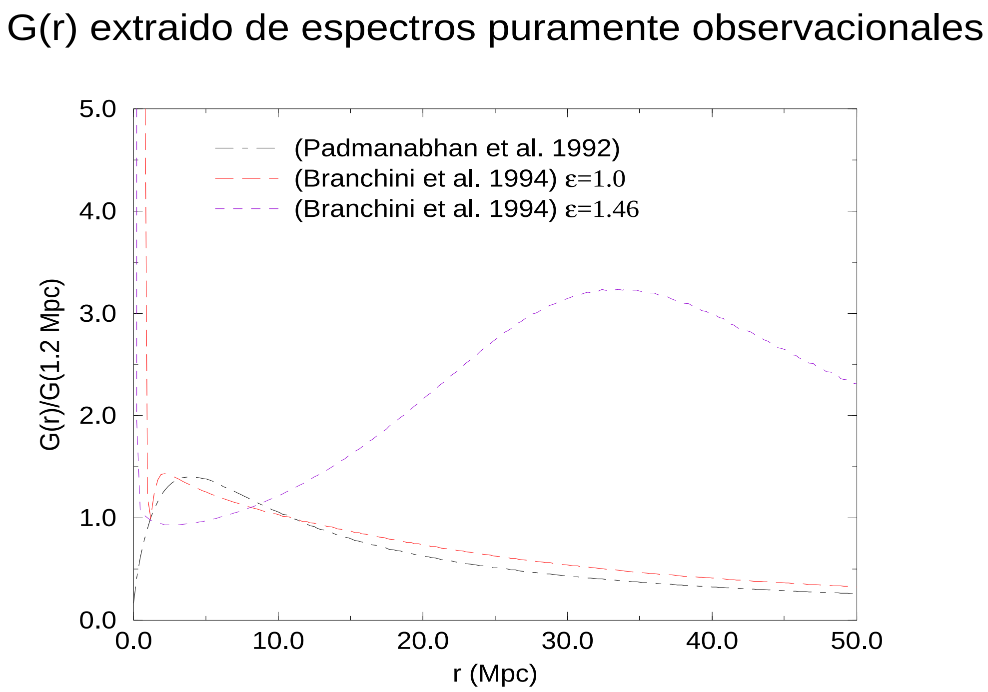

G(r) extraido de espectros puramente observacionales
(Padmanabhan et al. 1992)
(Branchini et al. 1994) ε=1.0
(Branchini et al. 1994) ε=1.46
G(r)/G(1.2 Mpc)
r (Mpc)
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
0.0
10.0
20.0
30.0
40.0
50.0

Fig.9

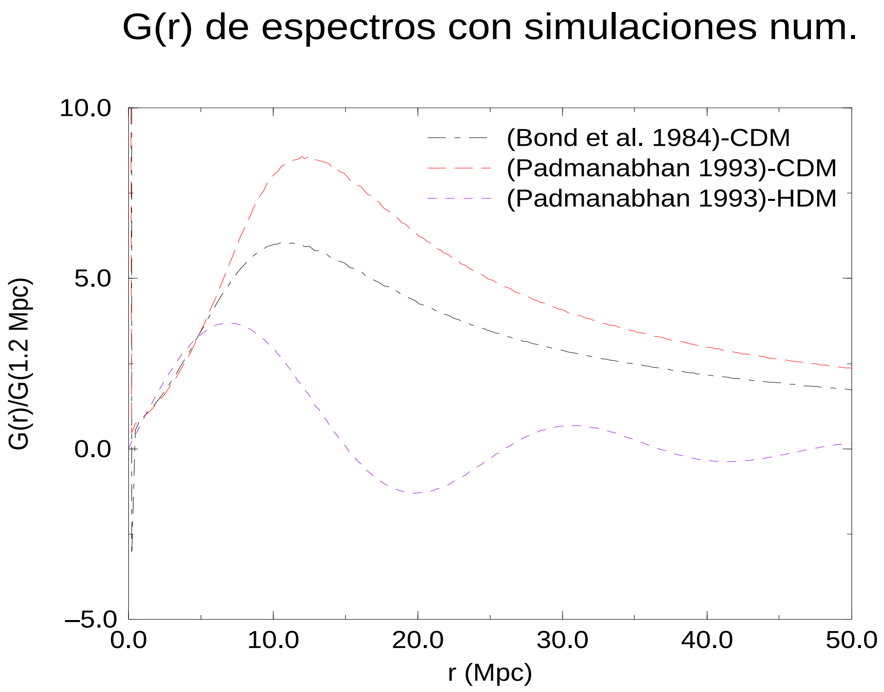

G(r) de espectros con simulaciones num.
(Bond et al. 1984)-CDM
(Padmanabhan 1993)-CDM
(Padmanabhan 1993)-HDM
G(r)/G(1.2 Mpc)
r (Mpc)
10.0
5.0
0.0
–5.0
0.0
10.0
20.0
30.0
40.0
50.0

Fig.10

Las funciones analíticas que representan estas curvas, dentro de una cierta desviación que hacemos lo menor posible mediante un ajuste por mínimos cuadrados son respectivamente, y para un rango entre 5 y 50 Mpc (ya que por debajo de 5 Mpc, consideramos que el error que induce la ecuación de Percus-Yevick es demasiado alto):

- (Padmanabhan et al. 1992):

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = \frac{1.06r^{0.584}}{1 + 0.0572r^{1.65}}. \tag{43}$$

(Desviación estándar del ajuste: 1.9×10^{-3}.)

- (Branchini et al. 1994), $\epsilon = 1.0$:

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = \frac{1.60r^{-0.112}}{1 + 0.00619r^{1.50}}. \tag{44}$$

(Desviación estándar del ajuste: 2.6×10^{-3}.)

- (Branchini et al. 1994), $\epsilon = 1.46$:

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = 1.88e^{-0.106r}(1 + 0.000173r^{3.62}). \tag{45}$$

(Desviación estándar del ajuste: 5.9×10^{-2}.)

- (Bond et al. 1984)-CDM:

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = \frac{0.162r^{1.96}}{1 + 0.00128r^{3.06}}. \tag{46}$$

(Desviación estándar del ajuste: 4.3×10^{-2}.)

- (Padmanabhan 1993)-CDM:

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = \frac{0.0812r^{2.30}}{1 + 0.000314r^{3.51}}. \tag{47}$$

(Desviación estándar del ajuste: 9.2×10^{-2}.)

- (Padmanabhan 1993)-HDM:

$$\frac{G(r)}{G(1.2Mpc)} = -63.4r^{-1.32}sin(0.281r + 2.11). \tag{48}$$

(Desviación estándar del ajuste: 0.11.)

Referente a las Fig. 9 y 10, no debemos olvidar que la validez de la ecuación de Percus-Yevick es mayor cuanto menor es el valor absoluto de V_{eff} (ver APENDICE B), con lo que no debemos fijarnos demasiado en los resultados por debajo de distancias del orden del Mpc.

Llegados a este punto, vemos que no es posible deducir una forma exacta y única de $G(r)$: hay demasiada variabilidad según el caso que se escoja. El mayor acercamiento a un comportamiento Newtoniano es el de Padmanabhan et al. 1992 y Branchini et al. 1994 para $\epsilon = 1$ (al fin y al cabo, ambos son para $\epsilon = 1$). *El otro caso procedente de observaciones se aleja más de un comportamiento constante para* $G(r)$. Es más, observando la Figura en que aparecen todos representados, los indicios apuntan hacia un comportamiento próximo al Newtoniano, es decir con G constante, para algún valor de ϵ entre 1.0 y 1.46.

Los modelos con simulaciones numéricas para CDM, tienen cierta similitud con los casos donde se utilizan observaciones de catálogos de galaxias, y podría incluso deducirse que su parecido con el comportamiento de una G constante (G Newtoniana) es bastante alto, a pesar de todas las aproximaciones que hemos realizado. Este resultado era, en cierto modo, de esperar ya que también los resultados observacionales de mapas de galaxias se aproximan a las prediciones de las simulaciones numéricas con CDM.

Es muy llamativo el resultado que hemos obtenido y probado para HDM, y que nos ofrece un resultado cualitativamente muy diferente de todos los demás: se trata de un G oscilante. ¿Un resultado imposible? Pudiera ser que no, según lo muestran (Morikawa 1991) o (Hill et al. 1990), que preveen, basándose en modelos cosmológicos inflacionarios con correcciones radiativas incorporadas, un posible Universo oscilante. Como hemos mencionado anteriormente, el hecho de obtener un potencial claramente distanciado de un comportamiento Newtoniano, nos llevaría a que tuviésemos que realizar de nuevo las simulaciones numéricas.

Es más, un potencial oscilatorio nos induciría un comportamiento oscilatorio que se transmitiría sucesivamente. Los modelos de HDM han tropezado con muchas dificultades a la hora de compararlos con las observaciones, pero el resultado aquí descubierto no sería necesariamente una dificultad, ya que existen observaciones que dan señales de ese posible Universo oscilante (Broadhurst et al. 1990) y que hemos visto que aparecería también conectado con la existencia de HDM.

VII. CONCLUSIONES.

No podemos decir que el potencial obtenido responda a una forma funcional determinada. Nuevamente, queremos señalar que nos movemos dentro de unos márgenes de error considerables debido a las aproximaciones y suposiciones que hemos ido realizando a lo largo del trabajo. A continuación las enumeramos otra vez:

- La distribución de densidad se considera en equilibrio, es decir, virializada.
- Hemos usado la aproximación de Percus-Yevick, que es quizás la mayor fuente de error dentro de las aproximaciones consideradas. Pueden verse los detalles de la aproximación en cuestión en el APENDICE B, que consiste en quedarse a primer orden en un cierto desarrollo de Taylor para funcionales.
- Suponemos que todas las galaxias poseen la misma masa, y que la densidad es de una galaxia por Mpc^3.
- Utilizamos un valor para la constante de Hubble tal que, en unidades $H_0 = 100\ Km/s\ Mpc^{-1}$.
- El espectro de potencia no ha sido hallado por nosotros, pero suponemos que puede presentar ciertos problemas, como por ejemplo:
  - Los mapas de distribución de materia son incompletos. Inevitablemente, ya que hay materia que no emite luz (materia oscura), y también materia luminosa que

no alcanza a ser vista por nuestros telescopios (por ejemplo galaxias elípticas enanas, que no pueden ser vistas más allá del grupo local y pudiera ser que su contribución a la masa total no sea nada despreciable).

– El efecto Sachs-Wolfe no es el único efecto que puede generar la anisotropía en la radiación cósmica de fondo.

– Suponemos que la función de transferencia $T(k) \approx 1$ para valores de k pequeños, lo que nos permite identificar la forma del espectro de potencia extraido del COBE con el correspondiente a la distribución de densidades para el tiempo cósmico presente (siempre para valores de k pequeños).

– Diferentes autores dan diferentes espectros de potencia, así que parece lógico suponer que cada uno de ellos está sometido a no despreciables márgenes de error.

La obtención de un resultado final exacto, sería utópico ante el elevado número de consideraciones que hemos introducido en nuestro problema.

Podemos interpretar los resultados obtenidos en este trabajo como una aproximación *cualitativa* al conocimiento de la dinámica a grandes escalas, tema hasta ahora inaccesible si no es con la extensión hipotética del ámbito de potenciales Newtonianos a estas escalas. Futuras consideraciones y refinamientos podrían mejorar los cálculos y datos, pero hasta entonces, podemos tomar estos resultados como una guía y orientación cualitativa de la dinámica a grandes escalas. Algunas de estas mejoras podrían ser la aproximación de Percus-Yevick haciendo un desarrollo de Taylor de orden superior a uno, o también se podría introducir una distribución de masas a las galaxias, o bien mejorar las observaciones del espectro de potencia, es decir, de la distribución de densidad.

Con este trabajo, hemos pretendido abrir una nueva linea de investigación, consistente en la aplicación de la mecánica estadística a la estructura a gran escala del Universo en que como se ha visto, da posibilidad de conectar diversos conceptos.

La información *cualitativa* que surge de este trabajo, se resume entonces en que, con los datos existentes, no nos es posible rechazar ni aceptar el comportamiento Newtoniano del potencial efectivo, pero sí nos es posible rechazar la idea de un potencial extremadamente diferente del Newtoniano. Los datos y la interpretación del Universo como un "líquido de galaxias en interacción gravitatoria", implican que el potencial será atractivo y decreciente con la distancia. Las hipótesis de CDM siguen implicando, dentro del margen estimativo que conllevan nuestras aproximaciones, resultados similares a los puramente observacionales. Y las hipótesis de HDM, nos llevan a un Universo oscilante.

VIII. AGRADECIMIENTOS.

Doy gracias especiales a mi director de tesina, Juan Pérez Mercader, a quien debo en una gran parte (yo más bien diría enorme) el hecho de haber podido realizar este trabajo. También, doy gracias en general a mis compañeros del LAEFF por sus sugerencias, y por todas esas cosas que se les suele agradecer a los compañeros.

IX. REFERENCIAS.

- Hill, T.L.: "Statistical mechanics", *Dover Publications* (1956).
- Percus, J.K. y Yevick, G.J.: "Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates", *Phys.Rev.* **110** (1958) 1.
- Lebowitz, J.L. y Percus, J.K.: "Statistical thermodynamics of nonuniform fluids", *J.Math.Phys.* **4** (1963) 116.
- Stanley, H.E.: "Introduction to phase transitions and critical phenomena", *Oxford University* (1971).
- Abramowitz, M. y Stegun, I.A. eds.: "Handbook of mathematical functions", *Dover Publications* (1972).

- Hildebrand, F.B.: "Introduction to numerical analysis", *Dover Publications* (1974).
- Balescu, R.: "Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics", *Krieger Publishing* (1975).
- Goodstein, D.L.: "States of matter", *Dover Publications* (1975).
- Layzer, D.: "Galaxy Clustering, its description and its interpretation" from "Stars and stellar systems", vol IX ("Galaxies and the Universe"), Chapter 17, *University of Chicago Press* (1975).
- March, N.H. y Tosi, M.P.: "Atomic dynamics in liquids", *Dover Publications* (1976).
- Peebles, P.J.E.: "The large-scale structure of the Universe", *Princeton University Press* (1980).
- Peebles, P.J.E.: "Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale- invariant primeval perturbations", *Astrophys. J.* **263** (1982) L1.
- Bond, J.R. y Efstathiou,G.: "Cosmic background radiation anisotropies in Universes dominated by nonbaryonic dark matter", *Astrophys. J.* **285** (1984) L45.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. y Vetterling, W.T.: "Numerical recipes. The art of scientific computing", *Cambridge University Press* (1986).
- Börner, G.: "The early Universe", *Springer-Verlag* (1988).
- Broadhurst, T.J., Ellis, R.S. y Koo,D.C.: "Large-scale distribution of galaxies at the Galactic poles", *Nature* **343** (1990) 726.
- Hill, C.T., Steinhardt, P.J. y Turner, M.S.: "Can oscillating physics explain an apparently periodic universe?", *Phys. Lett. B* **252** (1990) 343.
- Maddox, S.J., Efstathiou, G., Sutherland, W.J. y Loveday, J.: "Galaxy correlations on large scales", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **242** (1990) Short Communication 43P.

- Morikawa, M.: “Universe with oscillating expansion rate”, *Astrophys. J.* **369** (1991) 20.

- Goldman, T., Pérez-Mercader, J., Cooper,F. y Martin Nieto, M.: “The dark matter problem and quantum gravity”, *Phys. Lett. B* **281** (1992) 219.

- Padmanabhan, T. y Narasimha, D.: “Constraints on the shape of the density spectrum from COBE and galaxy surveys”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **259** (1992) Short Communication 41P.

- Smoot, G.F., Bennett, C.L., Kogut, A., Wright, E.L., Aymon, J., Boggess, N.W., Cheng, E.S., Amici, G. de, Gulkis, S., Hauser, M.G., Hinshaw, G., Jackson, P.D., Janssen, M., Kaita, E., Kelsall, T., Keegstra, P., Lineweaver, C., Loewenstein, K., Lubin, P., Mather, J., Meyer, S.S., Moseley, S.H., Murdock, T., Rokke, L., Silverberg, R.F., Tenorio, L., Weiss, R. y Wilkinson, D.T.: “Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps”, *Astrophys. J.* **396** (1992) L1.

- Bertolami, O., Mourão, J.M., Pérez-Mercader, J.: “Quantum gravity and the large scale structure of the universe”, *Phys. Lett. B* **311** (1993) 27.

- Lyth, D.H.: “Introduction to Cosmology”, *Lectures of Summer School in High Energy Physics and Cosmology, ICTP (Trieste), boletín electrónico de Los Alamos, ref. astro-ph/9312022* (1993).

- Padmanabhan, T.: “Structure formation in the Universe”, *Cambridge University Press* (1993).

- Branchini, E., Guzzo, L., Valdarnini, R.: “Modelling the power spectrum of density fluctuations: a phenomenological approach”, *accepted by Astrophys. J. Lett.* Dec93, *boletín electrónico de Los Alamos, ref. astro-ph/9401017* (1994).

- Gorski, K.M., Hinshaw, G., Banday, A.J., Bennett, C.L., Wright, E.L., Kogut, A., Smoot, G.F. y Lubin,P.: “On determining the spectrum of primordial inhomogeneity from the COBE DMR sky maps: II. Results of two years data analysis", *submitted to Astrophys. J. Lett., COBE preprint* 94-08, *boletín electrónico de Los Alamos, ref. astro-ph/9403067* (1994).

- Wright, E.L., Smoot, G.F., Bennett, C.L., Lubin, P.M.: "Angular power spectrum of the microwave background anisotropy seen by the COBE differential microwave radiometer", *COBE-Preprint* 94-02, *boletín electrónico de Los Alamos, ref. astro-ph/9401015.*

APPENDIX A: FUNCIONALES Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES.

A continuación describimos algunas propiedades importantes que son satisfechas por los funcionales y sus derivadas.

Nuestros funcionales serán aplicaciones matemáticas que llevan n números x_i y una función $v(y_1, ...y_n)$ a un número

$$A(x_1, ..., x_n; [v]) \equiv A[v(x_1, ..., x_n)] : \ \Re^n \times (espacio\ funciones) \longrightarrow \Re.$$

Depende pues de una función de n variables, y n variables (en nuestro caso $n = 3$). Un funcional, en general, puede depender de cualquier número de variables y funciones, que a su vez dependen de cualquier número de variables.

La definición de derivada de un funcional con respecto a una función es:

$$H(\vec{r_1}, \vec{r_2}; [v]) \equiv \frac{\delta A([v(\vec{r_1})])}{\delta v(\vec{r_2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{A([v(\vec{r_1}) + h\ \delta(\vec{r_1} - \vec{r_2})]) - A([v(\vec{r_1})])}{h} \tag{A1}$$

(Nota: la *delta* en el argumento funcional de la última ecuación es la delta de Dirac para 3 dimensiones). Esta derivada, cumple también que

$$A(\vec{r}, [v]) = \int d\vec{x} H(\vec{r}, \vec{x}; [v]) v(\vec{x}) \tag{A2}$$

o que

$$\delta A(\vec{r},[v]) = \int d\vec{x} H(\vec{r},\vec{x};[v])\delta v(\vec{x}). \tag{A3}$$

Evidentemente, la derivada funcional es otro funcional que depende de unas nuevas variables, componentes del vector $\vec{r_2}$. Cada derivada añade una dependencia con un nuevo vector. También $A(\vec{r_1};[v])$ es, a la vez, derivada funcional de otro funcional:

$$A(\vec{r_1};[v]) = \frac{\delta F([v])}{\delta v(\vec{r_1})}. \tag{A4}$$

Consecuentemente,

$$\frac{\delta v(\vec{y})}{\delta v(\vec{x})} = \delta(\vec{y}-\vec{x}). \tag{A5}$$

En un funcional de un funcional $A(\vec{r},[v(u)])$:

$$\delta A(\vec{r},[v]) = \int d\vec{x} H(\vec{r},\vec{x};[v])\delta v(\vec{x}) \tag{A6}$$

$$\delta v(\vec{r}) = \int d\vec{x} \frac{\delta v(\vec{r})}{\delta u(\vec{x})}\delta u(\vec{x}) \tag{A7}$$

entonces

$$\frac{\delta A(\vec{r},[v])}{\delta u(\vec{x})} = \int d\vec{s} \frac{\delta A(\vec{r},[v])}{\delta v(\vec{s})}\frac{\delta v(\vec{s})}{\delta u(\vec{x})}. \tag{A8}$$

Del mismo modo, en el caso que la función $u(\vec{x}) = B(\vec{x};[v])$ (aquí B es función, del mismo modo que cuando tomamos la derivada de una función con respecto a una variable, en el lugar de la variable podemos introducir una función):

$$\frac{\delta A(\vec{r}_1;[v])}{\delta B(\vec{r}_2;[v])} = \int d\vec{r}_3 \left[\frac{\delta A(\vec{r}_1;[v])}{\delta v(\vec{r_3})}\frac{\delta v(\vec{r_3})}{\delta B(\vec{r}_2;[v])}\right]. \tag{A9}$$

Un funcional A puede ser expandido en potencias del funcional B usando un teorema que generaliza los desarrollos de Taylor-McLaurin para funciones a los funcionales (denotamos $A(\vec{r}) \equiv A(\vec{r};0)$):

$$A(\vec{r}_1;[v]) = A(\vec{r}_1)$$

$$+\int d\vec{r}_2[B(\vec{r}_2;[v])-B(\vec{r}_2)][\frac{\delta A(\vec{r}_1;[v])}{\delta B(\vec{r}_2;[v])}]_{v=0}$$

$$+\frac{1}{2}\int d\vec{r}_2 d\vec{r}_3[B(\vec{r}_2;[v])-B(\vec{r}_2)][B(\vec{r}_3;[v])-B(\vec{r}_3)]$$

$$\times\left[\frac{\delta^2 A(\vec{r}_1;[v])}{\delta B(\vec{r}_2;[v])\delta B(\vec{r}_3;[v])}\right]_{v=0}+O(3). \quad \text{(A10)}$$

APPENDIX B: DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE PERCUS-YEVICK UTILIZANDO FUNCIONALES.

La demostración de la ecuación de Percus-Yevick, se puede encontrar en varias referencias como por ejemplo (Percus et al. 1958), (Lebowitz et al. 1963), (Goodstein et al. 1975), (Balescu 1975), (March et al. 1976) con métodos de demostración que son en muchos casos totalmente diferentes. Nosotros la demostraremos con un método en que utilizamos funcionales y algunas de sus propiedades descritas en el APENDICE anterior; básicamente al modo de (Lebowitz et al. 1963) o (Balescu 1975) aunque con algunas modificaciones.

Definimos los siguientes variable y funcionales:

$$v(\vec{r})=V(|\vec{r}-\vec{r_0}|), \quad \text{(B1)}$$

$$B(\vec{r};[v])=<\rho(\vec{r})>_v\ , \quad \text{(B2)}$$

$$A(\vec{r};[v])=<\rho(\vec{r})>_v\ e^{\beta v(\vec{r})}. \quad \text{(B3)}$$

Aquí, $<(\cdots)>_v$ denota lo mismo que $<(\cdots)>$ pero con una contribución extra al potencial al que está sometido cada partícula $v(\vec{r_i})$, debida a una fuerza externa. Consecuentemente, $<(\cdots)>\equiv<(\cdots)>_{v=0}$.

En este caso, por (B1), $<(\cdots)>_v$ tendrá el mismo significado físico que $<(\cdots)>$ pero con una partícula adicional, en una posición fija $\vec{r_0}$. Entonces, con (14) y (12) añadiendo la partícula fija en $\vec{r_0}$ (o sea, añadiendo el potencial v para cada partícula) se tiene que

$$< \rho(\vec{r}) >_v = \frac{N \int d\vec{r}_2 ... d\vec{r}_N e^{-\beta \sum_{i<j=0;\vec{r}_1 \equiv \vec{r}}^{N} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}}{\int d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N e^{-\beta \sum_{i<j=0}^{N} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}}. \tag{B4}$$

Con el cambio de variable $\vec{r}_i' = \vec{r}_{i-1}$:

$$< \rho(\vec{r}) >_v = \frac{N \int d\vec{r}_3' ... d\vec{r}_{N+1}' e^{-\beta \sum_{i<j=1;\vec{r}_2' \equiv \vec{r}}^{N+1} V(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|)}}{\int d\vec{r}_2' ... d\vec{r}_{N+1}' e^{-\beta \sum_{i<j=1}^{N+1} V(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|)}}; \tag{B5}$$

por el límite termodinámico, $< (\cdots) >$ para N partículas es igual a $< (\cdots) >$ para $N+1$ partículas, y, de nuevo, con (14) y (15) podemos escribir

$$< \rho(\vec{r}) >_v = \frac{\frac{Z}{N+1} < \rho(\vec{r}_1')\rho(\vec{r}_2') >}{\frac{Z}{N+1} < \rho(\vec{r}_1') >} = \frac{< \rho(\vec{r}_0)\rho(\vec{r}) >}{< \rho(\vec{r}_0) >}. \tag{B6}$$

Otra relación que será útil en nuestra demostración es:

$$\frac{\delta < \rho(\vec{r}_1) >_v}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3'))} = \frac{N}{Z_v} \int d\vec{r}_2 ... d\vec{r}_N$$

$$\times e^{-\beta[U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} v(\vec{r}_i)]} [\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta v(\vec{r}_i)}{\delta v(\vec{r}_3')}]$$

$$- \frac{N}{Z_v^2} \left[\int d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N e^{-\beta[U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} v(\vec{r}_i)]} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta v(\vec{r}_i)}{\delta v(\vec{r}_3')} \right] \right]$$

$$\times \left[\int d\vec{r}_2 ... d\vec{r}_N e^{-\beta[U(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N) + \sum_{i=1}^{N} v(\vec{r}_i)]} \right], \tag{B7}$$

que mediante (A5), (14) y (15) con un potential extra v, se re–escribe como:

$$\frac{\delta < \rho(\vec{r}_1) >_v}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3'))} = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3') < \rho(\vec{r}_1) >_v$$

$$+ < \rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_3') >_v - < \rho(\vec{r}_1) >_v < \rho(\vec{r}_3') >_v \tag{B8}$$

(NOTA: la última δ es la delta de Dirac; no confundir con el símbolo de derivada funcional).

Una última definición que haremos es:

$$C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_v \equiv \frac{\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{<\rho(\vec{r}_1)>_v} - \frac{\delta(-\beta v(\vec{r}_2))}{\delta(<\rho(\vec{r}_1)>_v)} \tag{B9}$$

(la δ en el primer término es la delta de Dirac).

Usando (A9) y (A5):

$$\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{\delta<\rho(\vec{r}_1)>_v}{\delta<\rho(\vec{r}_2)>_v}$$

$$= \int d\vec{r}_3 \frac{\delta<\rho(\vec{r}_1)>_v}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}\frac{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}{\delta<\rho(\vec{r}_2)>_v}, \tag{B10}$$

que con (B8) y (B9) conduce a

$$\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \int d\vec{r}_3[[<\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_3)>_v$$

$$-<\rho(\vec{r}_1)>_v<\rho(\vec{r}_3)>_v]\left[\frac{\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{<\rho(\vec{r}_2)>_v} - C(\vec{r}_2,\vec{r}_3)_v\right]]$$

$$-<\rho(\vec{r}_1)>_v C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_v + \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2),$$

$$<\rho(\vec{r}_1)>_v C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_v = \int d\vec{r}_3[[<\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_3)>_v$$

$$-<\rho(\vec{r}_1)>_v<\rho(\vec{r}_3)>_v]\left[\frac{\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{<\rho(\vec{r}_2)>_v} - C(\vec{r}_2,\vec{r}_3)_v\right]]. \tag{B11}$$

De aquí, si hacemos $v=0$ en (B11), aplicando (16) y (4) vemos que

$$\xi(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_{v=0}$$

$$+<\rho>\int d\vec{r}_3 C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_{v=0}\xi(\vec{r}_1-\vec{r}_3), \tag{B12}$$

de manera que comparando con (18) nos da:

$$C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)_{v=0} = C(\vec{r}_1-\vec{r}_2). \tag{B13}$$

Ahora, tras estas identidades, estamos en condiciones de demostrar la ecuación de Percus-Yevick. La aproximación que haremos será tomar (A10) hasta primer orden con A, B, v

definidos por (B3), (B2), (B1). Esta aproximación será tanto mejor, cuando menor sea el valor de v, es decir, en el rango de distancia donde el potencial toma su menor valor absoluto. Utilizaremos también (A9).

$$< \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)} =< \rho(\vec{r}_1) >_{v=0}$$

$$+ \int d\vec{r}_2 [[< \rho(\vec{r}_2) >_v - < \rho(\vec{r}_2) >_{v=0}]$$

$$\int d\vec{r}_3 \left[\frac{\delta(< \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)})}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))} \frac{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}{\delta(< \rho(\vec{r}_2) >_v)} \right]_{v=0}]. \tag{B14}$$

Ahora bien, la primera derivada es

$$\frac{\delta(< \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)})}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))} = e^{\beta v(\vec{r}_1)} \frac{\delta(< \rho(\vec{r}_1) >_v)}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}$$

$$+ < \rho(\vec{r}_1) >_v \, \frac{\delta e^{\beta v(\vec{r}_1)}}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}, \tag{B15}$$

que usando (A5) y (B8) se puede escribir como

$$\frac{\delta(< \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)})}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))} = e^{\beta v(\vec{r}_1)} [< \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_3) >_v$$

$$- < \rho(\vec{r}_1) >_v < \rho(\vec{r}_3) >_v + < \rho(\vec{r}_1) >_v \, \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)]$$

$$- < \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$$

$$= e^{\beta v(\vec{r}_1)} [< \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_3) >_v - < \rho(\vec{r}_1) >_v < \rho(\vec{r}_3) >_v]. \tag{B16}$$

Luego, usando la última igualdad, (B9) y (B13), la integral en $\vec{r}_3$ es,

$$\int d\vec{r}_3 \left[\frac{\delta(< \rho(\vec{r}_1) >_v \, e^{\beta v(\vec{r}_1)})}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))} \frac{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}{\delta(< \rho(\vec{r}_2) >_v)} \right]_{v=0}$$

$$= \int d\vec{r}_3 [e^{\beta v(\vec{r}_1)} [< \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_3) >_v - < \rho(\vec{r}_1) >_v < \rho(\vec{r}_3) >_v]$$

$$[\frac{\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{<\rho(\vec{r}_1)>_v} - C(\vec{r}_2,\vec{r}_3)_v]]_{v=0} = \int d\vec{r}_3[[<\rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_3)>$$

$$-<\rho(\vec{r}_1)><\rho(\vec{r}_3)>]\left[\frac{\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{<\rho(\vec{r}_1)>} - C(\vec{r}_2-\vec{r}_3)\right]], \tag{B17}$$

y usando (B11):

$$\int d\vec{r}_3\left[\frac{\delta(<\rho(\vec{r}_1)>_v e^{\beta v(\vec{r}_1)})}{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}\frac{\delta(-\beta v(\vec{r}_3))}{\delta(<\rho(\vec{r}_2)>_v)}\right]_{v=0}$$

$$=<\rho(\vec{r}_1)> C(\vec{r}_2-\vec{r}_1). \tag{B18}$$

Introducimos esta ecuación en (B14) usando también (B6) y (16):

$$\frac{<\rho(\vec{r}_0)\rho(\vec{r}_1)>}{<\rho>^2}e^{\beta V(|\vec{r}_1-\vec{r}_0|)}$$

$$= 1+<\rho>\int d\vec{r}_2[<\rho(\vec{r}_0)\rho(\vec{r}_1)>-1]C(\vec{r}_2-\vec{r}_1), \tag{B19}$$

y con (17), (4) y para $r = |\vec{r}_1-\vec{r}_0|$:

$$C(r) = (1-e^{\beta V(r)})(1+\xi(r)), \tag{B20}$$

que es la ecuación de Percus-Yevick.

APPENDIX C: ALGUNAS OBSERVACIONES DE UTILIDAD EN EL CÁLCULO NUMÉRICO.

Tenemos que hacer numéricamente integrales entre 0 e ∞. Quizás, podamos encontrar la expresión analítica de algunas de ellas, pero el caso general tiene que ser tratado numéricamente.

Uno de los métodos típicos de integración numérica es la integración por cuadraturas de Laguerre-Gauss (ver, por ejemplo, Hildebrand 1974), en la que una integral de la forma $\int_0^\infty e^{-x}f(x)$ se escribe como:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) \approx \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) \tag{C1}$$

$$w_i = \frac{(m!)^2 x_i}{L_{m-1}(x_i)^2 m^4}, \tag{C2}$$

donde x_i es el i–ésimo cero de $L_m(x)$, y $L_m(x)$ los polinomios de Laguerre:

$$L_m(x) = e^x \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x}). \tag{C3}$$

Así, por ejemplo, para una de las integrales del texto, tenemos

$$\int_0^\infty dk\ ksin(kr)P(k) = \frac{1}{r^2}\int_0^\infty dx\ xsin(x)P(x/r)$$

$$\approx \sum_{k=1}^{m} w_k e^{x_k} sin(x_k) x_k P(x_k/r). \tag{C4}$$

En otras ocasiones hemos usado un algoritmo que nos da la transformada sinusoidal de Fourier:

$$F(k) = \int_0^\infty dx f(x) sin(kx)$$

$$\approx \sum_{i=0}^{N-1} \Delta\ f(x_i) \sin(k\ i\ \Delta), \tag{C5}$$

con $x_i = i\Delta$, $f_i = f(x_i)$. Entonces,

$$F(k) = F(j\frac{\pi}{N\Delta}) = \Delta\ F_j\ , \tag{C6}$$

$$F_j = \Delta \sum_{i=1}^{N} f_i sin(\frac{\pi i k}{N}) \tag{C7}$$

y realizamos ésto mediante una transformada sinusoidal rápida de Fourier con subrutinas que pueden ser encontradas en (Press et al. 1986): SINFT.FOR, REALFT.FOR, FOUR1.FOR.

Los valores típicos que hemos usado en nuestro programa son: $N = 2^{16}$, $\Delta = 0.01$.